



Olasılık Teorisi ve Temel Kavramlar: Bayes, Dağılımlar ve Kombinasyonlar

Belirsizlikle başa çıkmanın matematiği: Olasılık teorisinden Bayesci yaklaşımlara, temel kavramlardan ileri uygulamalara kapsamlı bir yolculuk.

Bölüm 1: Olasılık Teorisine Giriş

Olasılık teorisi, belirsizliği matematiksel bir çerçevede incelememizi sağlayan güçlü bir araçtır. Günlük hayatımızdan bilimsel araştırmalara kadar pek çok alanda karşımıza çıkan belirsizlikleri sayısal değerlerle ifade etmemize olanak tanır.

Olasılık Tanımı

Bir olayın gerçekleşme ihtimalini 0 ile 1 arasında bir sayı ile ifade ederiz. 0 imkansız, 1 kesin olayı temsil eder.

Temel Kavramlar

Deney: Gözlenebilir bir süreç. Örneklem uzayı: Tüm olası sonuçlar. Olay: Örneklem uzayının bir alt kümesi.

Kolmogorov Aksiyomları

Modern olasılık teorisinin temeli olan üç aksiyom, olasılık hesaplamalarının matematiksel kurallarını belirler.

Olasılık Aksiyomları ve Temel Kurallar

Kolmogorov'un Üç Aksiyomu

Andrey Kolmogorov, 1933'te olasılık teorisini sağlam bir matematiksel temele oturtmuştur:

1. **Negatif Olmama:** Herhangi bir A olayı için $P(A) \geq 0$
2. **Kesinlik:** Örneklem uzayı S için $P(S) = 1$
3. **Toplamsal Özellik:** Ayrık olaylar için toplam olasılık, olasılıkların toplamına eşittir

Bu aksiyomlar, tüm olasılık teorisinin yapı taşlarıdır ve diğer tüm olasılık kuralları bu temel prensiplerden türetilir.

Zar Atma Örneği

Standart bir zar attığımızda örneklem uzayı: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- Her bir yüzün gelme olasılığı: $P(i) = \frac{1}{6}$
- Çift sayı gelme olasılığı: $P(\text{çift}) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
- 5'ten büyük sayı: $P(X > 5) = P(6) = \frac{1}{6}$

☐ **Önemli Not:** Tüm olası sonuçların olasılıkları toplandığında her zaman 1'e eşit olmalıdır.

Koşullu Olasılık ve Bağımsızlık

Koşullu olasılık, bir olayın gerçekleştiğini bildiğimizde başka bir olayın gerçekleşme olasılığının nasıl değiştiğini inceler. Bu kavram, olasılık teorisinin en güçlü araçlarından biridir ve Bayes teoreminin temelini oluşturur.

Koşullu Olasılık Formülü

B olayının gerçekleştiği bilindiğinde A olayının olasılığı:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Bu formül, sadece $P(B) > 0$ olduğunda geçerlidir.

Bağımsız Olaylar

İki olay birbirinden bağımsızsa, birinin gerçekleşmesi diğerinin olasılığını etkilemez:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Bağımsızlık durumunda: $P(A|B) = P(A)$

İki Zar Örneği

İki zar atıldığında, birinci zarın sonucu ikinci zarın sonucunu etkilemez. Birinci zarda 6 gelme olasılığı $\frac{1}{6}$, ikinci zarda da 6 gelme olasılığı $\frac{1}{6}$ 'dir. Her ikisinde de 6 gelme olasılığı: $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

Koşullu Olasılık

İki kümenin kesişimi ve koşullu olasılık ilişkisi görsel olarak en iyi Venn diyagramları ile anlaşılır. A ve B kümelerinin kesişimi, her iki olayın da gerçekleştiği durumu temsil eder.



Bölüm 2: Bayes Teoremi ve Bayesci İstatistik

Bayes teoremi, 18. yüzyılda İngiliz matematikçi Thomas Bayes tarafından geliştirilmiş ve Pierre-Simon Laplace tarafından genişletilmiştir. Bu teorem, yeni kanıtlar ışığında inançlarımızı nasıl güncellememiz gerektiğini matematiksel olarak gösterir.

Bayes Teoremi Formülü

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$



Önsel Olasılık - P(A)

Herhangi bir veri görmeden önce olaya ilişkin başlangıç inancımız



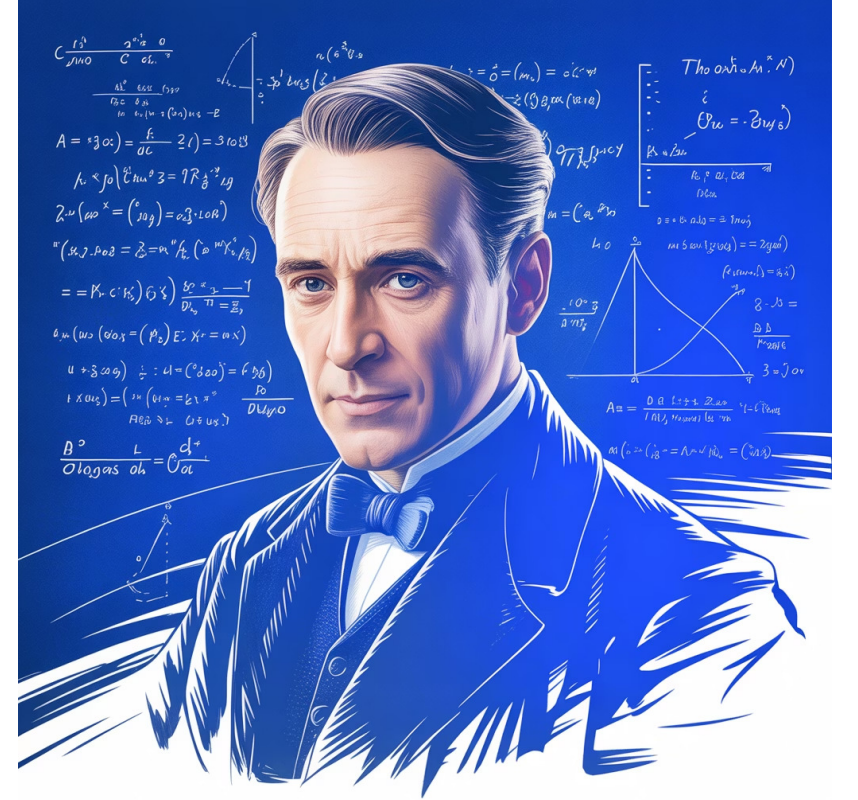
Sonral Olasılık - P(A|B)

B gözleminden sonra güncellenmiş A olasılığı



Olabilirlik - P(B|A)

A gerçekleştiğinde B'nin gözlenme olasılığı



Tarihsel Not: Bayes'in orijinal çalışması ölümünden sonra 1763'te yayımlanmıştır. Modern Bayesci istatistiğin temeli bu çalışmaya dayanır.

Bayes Teoreminin Uygulamaları

Bayes teoremi, teorik bir formül olmaktan öte, günlük hayatta ve bilimde sayısız uygulamaya sahiptir. Özellikle belirsizlik altında karar verme süreçlerinde kritik rol oynar.

Tıbbi Teşhis

Test sonuçlarına göre hastalık olasılığını güncelleme. Yalancı pozitif ve negatif oranlarını dikkate alarak doğru teşhis koyma.

Makine Öğrenmesi

Naive Bayes sınıflandırıcıları, spam filtreleme, doğal dil işleme ve örüntü tanıma sistemlerinde yaygın kullanım.

Risk Analizi

Finansal piyasalarda, sigorta sektöründe ve proje yönetiminde risk değerlendirmesi ve güncelleme.

Gerçek Hayat Örneği: Kanser Testi

Bir kanser testinin %95 duyarlılıkla (gerçek hastaları yakalama) ve %90 özgüllükle (sağlıklıları doğru belirleme) çalıştığını varsayalım. Toplumda hastalık prevalansı %1 ise:

Verilen Bilgiler

- $P(\text{Hasta}) = 0.01$
- $P(\text{Test+}|\text{Hasta}) = 0.95$
- $P(\text{Test+}|\text{Sağlıklı}) = 0.10$

Bayes ile Hesaplama

Test pozitif çıkan birinin gerçekten hasta olma olasılığı sadece **%8.8** civarındadır! Bu, neden tek bir test sonucuna körü körüne güvenmememiz gerektiğini gösterir.

Bölüm 3: Kontenjans Tablosu ve Koşullu Olasılık Hesapları

Kontenjans tablosu, iki veya daha fazla kategorik değişken arasındaki ilişkiyi görselleştirmek ve analiz etmek için kullanılan güçlü bir araçtır. İstatistikte sıklıkla karşılaşılan bu yapı, değişkenler arası bağımlılığı incelememize olanak tanır.

Kontenjans Tablosu Nedir?

İki kategorik değişkenin ortak frekans dağılımını gösteren bir tablodur. Satırlar bir değişkenin, sütunlar diğer değişkenin kategorilerini temsil eder. Her hücre, ilgili kategori kombinasyonunun frekansını gösterir.

Tabloda Yapılabilecek Analizler

- Marjinal olasılıklar:** Satır ve sütun toplamlarından hesaplanır
- Koşullu olasılıklar:** Bir değişken sabitken diğerinin dağılımı
- Bağımsızlık testi:** Ki-kare testi ile değişkenler arası ilişki
- Odds oranı:** İki kategorik değişken arası ilişkinin gücü

Örnek: Sigara ve Akciğer Hastalığı

	Hastalık Var	Hastalık Yok
İçiyor	60	40
İçmiyor	30	170

Bu tablodan:

- Sigara içenlerde hastalık: $60/100 = \%60$
- İçmeyenlerde hastalık: $30/200 = \%15$
- Sigara, hastalık riskini 4 kat artırıyor

❏ **İstatistiksel Bağımsızlık:** Eğer $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ ise değişkenler bağımsızdır. Kontenjans tablosunda bu, gözlenen frekansların beklenen frekanslarla uyumlu olması anlamına gelir.

Bölüm 4: Permütasyon ve Kombinasyon

Permütasyon ve kombinasyon, olasılık teorisinin temel yapı taşlarıdır. Bu kavramlar, nesneleri seçme ve düzenleme yollarının sayısını hesaplamamıza olanak tanır ve birçok olasılık probleminin çözümünde kritik rol oynar.

Permütasyon

Tanım: n farklı nesneden r tanesinin sıralı olarak seçilmesi

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n - r)!}$$

Ne zaman kullanılır? Sıralamanın önemli olduğu durumlarda. Örneğin, yarış sıralaması, şifre oluşturma, görev atama.

Örnek Hesaplama

5 kişiden 3'ünü sıralı şekilde seçmek:

$$P(5, 3) = \frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60 \text{ farklı sıralama}$$

Kombinasyon

Tanım: n farklı nesneden r tanesinin sırasız olarak seçilmesi

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n - r)!}$$

Ne zaman kullanılır? Sıralamanın önemsiz olduğu durumlarda. Örneğin, takım oluşturma, komite seçimi, kart kombinasyonları.

Örnek Hesaplama

5 kişiden 3'lük bir grup seçmek:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{120}{6 \cdot 2} = 10 \text{ farklı grup}$$

Temel Fark: Permütasyonda ABC ve BAC farklı sonuçlardır. Kombinasyonda ise aynı sonuç olarak kabul edilir. Bu yüzden $P(n, r) \geq \binom{n}{r}$



Permütasyon ve Kombinasyon: Görsel Örnekler



Permütasyon

1, 2, 3 rakamlarından 2'li permütasyonlar: 12, 21, 13, 31, 23, 32 → 6 farklı sıralama



Kombinasyon

1, 2, 3 rakamlarından 2'li kombinasyonlar: {1,2}, {1,3}, {2,3} → 3 farklı grup

Bölüm 5: Beklenen Değer ve Varyans Mantığı

Beklenen değer ve varyans, rassal değişkenlerin davranışını özetleyen temel ölçülerdir. Beklenen değer ortalama sonucu, varyans ise değişkenliği ölçer.

Beklenen Değer (Ortalama)

Bir rassal değişkenin uzun vadede alacağı değerlerin ağırlıklı ortalamasıdır:

$$E(X) = \sum_i x_i \cdot P(x_i)$$

Beklenen Değerin Özellikleri

- Doğrusallık:** $E(aX + b) = aE(X) + b$
- Toplam:** $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- Çarpım (bağımsız için):** $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$

Zar Atma Örneği

Standart bir zarda beklenen değer:

$$E(X) = 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + \dots + 6\left(\frac{1}{6}\right) = 3.5$$

Varyans ve Standart Sapma

Varyans, değerlerin beklenen değer etrafındaki yayılımını ölçer:

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Standart sapma, varyansın karekökü olup orijinal birimle ifade edilir:

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

Varyansın Özellikleri

- Sabit çarpan:** $Var(aX) = a^2 Var(X)$
- Toplam (bağımsız için):** $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$
- Minimum değer:** $Var(X) \geq 0$

Pratik Anlam: Beklenen değer "ortalama kazancı", standart sapma ise "riskin büyüklüğünü" temsil eder. Finansal kararlarda her ikisi de dikkate alınmalıdır.

Bölüm 6: Kesikli Olasılık Dağılımları

Kesikli olasılık dağılımları, sayılabilir sonuç uzayına sahip rassal değişkenleri modellemek için kullanılır. Bu dağılımlar, gerçek dünya problemlerinde sıkça karşılaşılan durumları matematiksel olarak tanımlar.

$f(x)$

Olasılık Kütle Fonksiyonu (PMF)

Kesikli bir rassal değişken X için, her x değerinin olasılığını veren fonksiyondur:

$$p(x) = P(X = x) \text{ ve } \sum_x p(x) = 1$$

$F(x)$

Kümülatif Dağılım Fonksiyonu (CDF)

X 'in x 'e eşit veya küçük olma olasılığı:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} p(t)$$

μ, σ^2

Temel Parametreler

Her dağılım beklenen değer, varyans ve diğer momentlerle karakterize edilir. Bu parametreler dağılımın şeklini ve davranışını belirler.

Önemli Kesikli Dağılımlar

Dört temel kesikli dağılım farklı gerçek dünya senaryolarını modellemek için kullanılır: Bernoulli (tek deneme), Binom (sabit sayıda bağımsız deneme), Poisson (nadir olaylar), ve Hipergeometrik (geri koymadan örnekleme).

Bernoulli Dağılımı



Bernoulli dağılımı, olasılık teorisinin en basit ve temel dağılımıdır. İki olası sonucu olan tek bir deneyi modellemek için kullanılır: başarı veya başarısızlık.

Matematiksel Tanım

X rassal değişkeni Bernoulli dağılımına sahipse:

$$P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = 1 - p$$

Burada p başarı olasılığıdır ve $0 \leq p \leq 1$

$$E(X) = p$$

Beklenen Değer

Ortalama sonuç başarı olasılığına eşittir

$$p(1-p)$$

Varyans

p=0.5'te maksimum değişkenlik gösterir

Klasik Örnek: Yazı-Tura

Adil bir madeni para atıldığında, tura gelme olasılığı $p=0.5$ 'tir. $X=1$ tura, $X=0$ yazı olarak tanımlanırsa, bu Bernoulli(0.5) dağılımıdır.

Gerçek Hayat Uygulamaları

- Kalite kontrolde ürünün kusurlu olup olmadığının testi
- Tıbbi testlerde hastalık varlığının belirlenmesi
- Online reklamlarda tıklanma/tıklanmama durumu
- Müşteri dönüşüm analizinde satın alma/almama kararı

Binom Dağılımı

Binom dağılımı, n bağımsız Bernoulli denemesinin toplam başarı sayısını modellemek için kullanılır. Sabit başarı olasılığına sahip tekrarlanan denemelerin sonucunu tahmin etmede güçlü bir araçtır.

Matematiksel Tanım

$X \sim \text{Binom}(n, p)$ dağılımına sahipse, k başarı olasılığı:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Burada:

- n: Deneme sayısı (sabit)
- p: Her denemede başarı olasılığı (sabit)
- k: Başarı sayısı (0, 1, 2, ..., n)

Binom Dağılımının Özellikleri

- Beklenen Değer:** $E(X) = np$
- Varyans:** $Var(X) = np(1 - p)$
- Mod:** Yaklaşık olarak np'de en yüksek olasılık
- Simetri:** p=0.5 için simetrik, aksi halde çarpık

Gerçek Dünya Uygulamaları

Kalite Kontrol

Bir partiden n ürün test edildiğinde kusurlu ürün sayısının belirlenmesi

Tıbbi Araştırmalar

n hastadan kaçının tedaviye olumlu yanıt vereceğinin tahmini

Pazarlama

n müşteriye gönderilen kampanyada kaç dönüşüm olacağının projeksiyonu

10 Atışta 3 İsabet Örneği

Bir basketbolcu serbest atışta %70 başarı oranına sahip. 10 atışta tam 3 isabet yapma olasılığı:

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} (0.7)^3 (0.3)^7$$

$$= 120 \times 0.343 \times 0.0002187 \approx 0.009$$

Yani sadece %0.9 olasılık - çok düşük!

❏ **Beklenen isabet sayısı:** $E(X) = 10 \times 0.7 = 7$ atış

Poisson Dağılımı

Poisson dağılımı, sabit bir zaman veya mekan aralığında nadir olayların sayısını modellemek için kullanılır. Fransız matematikçi Siméon Denis Poisson tarafından 1837'de tanıtılmıştır.



Tanım ve Formül

$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ dağılımına sahipse:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

λ : Ortalama olay sayısı (tek parametre)



Özellikler

Beklenen Değer: $E(X) = \lambda$

Varyans: $Var(X) = \lambda$

Dikkat: Beklenen değer ve varyans eşittir!

Ne Zaman Kullanılır?

Poisson dağılımı aşağıdaki koşullar sağlandığında uygundur:

1. Olaylar bağımsız olarak gerçekleşir
2. Ortalama oran sabittir
3. İki olay aynı anda gerçekleşemez
4. Olaylar nadir ve rastgeledir

Uygulama Alanları

- **Telekomünikasyon:** Birim zamanda gelen çağrı/mesaj sayısı
- **Trafik:** Belirli bir yoldan geçen araç sayısı
- **Sağlık:** Acil servise gelen hasta sayısı
- **Radioaktivite:** Belirli sürede gerçekleşen bozunma sayısı
- **E-ticaret:** Web sitesine gelen ziyaretçi sayısı

Çağrı Merkezi Örneği

Bir çağrı merkezine saatte ortalama 12 çağrı geliyorsa ($\lambda=12$), bir saatte tam 15 çağrı gelme olasılığı:

$$P(X = 15) = \frac{e^{-12} \cdot 12^{15}}{15!} \approx 0.0724$$

Yani %7.24 olasılık

Hipergeometrik Dağılım

Hipergeometrik dağılım, sonlu bir popülasyondan geri koymadan örnekleme yapıldığında başarı sayısını modellemek için kullanılır. Binom dağılımdan farkı, denemelerin bağımsız olmamasıdır.

Matematiksel Tanım

N elemanlı bir popülasyonda K başarı varken, n eleman çekildiğinde k başarı olasılığı:

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Parametreler

- N:** Toplam popülasyon büyüklüğü
- K:** Popülasyondaki başarı sayısı
- n:** Çekilen örneklem büyüklüğü
- k:** Örneklemde gözlenen başarı sayısı

Özellikler

Beklenen Değer: $E(X) = n \frac{K}{N}$

Varyans: $Var(X) = n \frac{K}{N} \frac{N-K}{N} \frac{N-n}{N-1}$

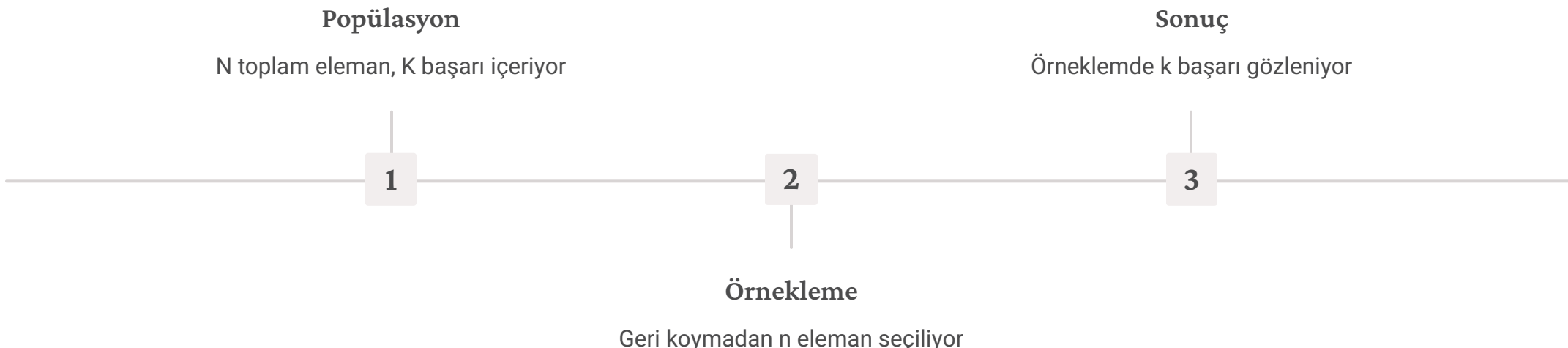
Kusurlu Ürün Kontrolü Örneği

100 üründen 10'u kusurludur. 20 ürün rastgele seçildiğinde tam 3 kusurlunun çıkma olasılığı:

N=100, K=10, n=20, k=3

$$P(X = 3) = \frac{\binom{10}{3} \binom{90}{17}}{\binom{100}{20}}$$

Bu hesaplama yaklaşık %27.8 olasılık verir.



Binom vs Hipergeometrik: N çok büyük ve n/N çok küçükse, hipergeometrik dağılım binom dağılıma yakınsar. Örneğin, büyük bir göldeki balık popülasyonu için geri koymadan örnekleme bile bağımsız kabul edilebilir.

Dağılımların Grafikselsel Karşılaştırması

Binom, Poisson ve Hipergeometrik dağılımlar farklı senaryolarda kullanılsa da, belirli koşullar altında birbirine yakınsarlar. Bu grafik, aynı ortalama değer için üç dağılımın olasılık kütle fonksiyonlarını göstermektedir.


$$n \cdot p$$

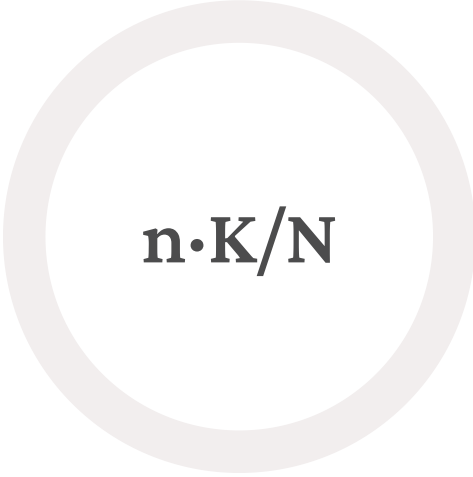
Binom Ortalaması

Sabit p ile n deneme


$$\lambda$$

Poisson Ortalaması

Nadir olaylar için


$$n \cdot K/N$$

Hipergeometrik

Geri koymadan

Bölüm 7: Bayesci İstatistikte Olasılık Dağılımları

Bayesci yaklaşım, olasılık dağılımlarını sadece veri modellemesi için değil, aynı zamanda belirsizliği ifade etmek ve yeni veri ışığında güncellemek için kullanır. Bu paradigmada, parametreler de rassal değişkenler olarak ele alınır.



Önsel Dağılım

Parametre hakkında veri görmeden önceki inancımız. Özel veya önceki çalışmalardan gelebilir.



Olabilirlik Fonksiyonu

Gözlemlenen verinin, farklı parametre değerleri için olasılığı. Veriyle parametre ilişkisi.



Sonral Dağılım

Veri gözlemledikten sonra güncellenmiş inanç. Bayes teoremi ile hesaplanır.

Binom Dağılımı ile Bayes Çıkarımı

Bir madeni paranın hileli olup olmadığını test ettiğimizi düşünelim:

1. **Önsel:** Para adildir, $p \approx 0.5$ (beta dağılımı ile)
2. **Veri:** 100 atışta 65 tura geldi
3. **Olabilirlik:** Binom(100, p) kullan
4. **Sonral:** Bayes ile güncelle, yeni p dağılımı

Sonral dağılım, paranın %65 civarı turalı olduğuna dair güçlü kanıt sunar.

MCMC Yöntemlerine Giriş

Karmaşık sonral dağılımlar analitik olarak hesaplanamadığında, **Markov Zincirli Monte Carlo (MCMC)** yöntemleri kullanılır:

- **Metropolis-Hastings:** Genel amaçlı örnekleme
- **Gibbs Örneklemesi:** Koşullu dağılımlardan iteratif örnekleme
- **Hamiltonian Monte Carlo:** Gradyan tabanlı etkin örnekleme

Bu yöntemler, yüksek boyutlu parametre uzaylarında sonral dağılımdan örnekler üretir.

 **Bayesci Avantaj:** Belirsizliği tam olarak nicelendirir, küçük veri setlerinde daha iyi çalışır, ve önsel bilgiyi sistematik olarak dahil eder.

Sonuç: Olasılık Teorisi ve Dağılımlar Hayatımızda

Belirsizliği Anlamanın Matematiği



Olasılık Teorisi

0 ile 1 arasında belirsizliği ölçme, aksiyomatik temeller ve gerçek dünyayı modelleme gücü



Bayes Teoremi

Yeni kanıtlarla inançları güncelleme, tıptan yapay zekaya kadar yaygın uygulama alanları



Permütasyon ve Kombinasyon

Olasılık hesaplamalarının temeli, düzenleme ve seçme problemlerinde kritik araçlar



Kesikli Dağılımlar

Bernoulli'den Poisson'a, gerçek dünya olaylarını matematiksel olarak modelleme

Ana Çıkarımlar

- Olasılık teorisi, belirsizliği sistematik olarak analiz etmenin matematiksel çerçevesidir
- Bayes teoremi, bilgiyi güncellemede ve karar vermede güçlü bir araçtır
- Kontenjans tabloları, değişkenler arası ilişkileri görselleştirmede etkilidir
- Permütasyon ve kombinasyon, sayma problemlerinin temelidir
- Her kesikli dağılım farklı bir gerçek dünya senaryosunu optimal şekilde modellemektedir

Gelecek Yönelimler

Olasılık teorisi, yapay zeka, makine öğrenmesi, risk analizi ve veri bilimi gibi alanlarda giderek daha merkezi bir rol oynamaktadır. Bayesci yöntemler ve olasılıksal programlama, geleceğin teknolojilerinin temelini oluşturmaktadır.