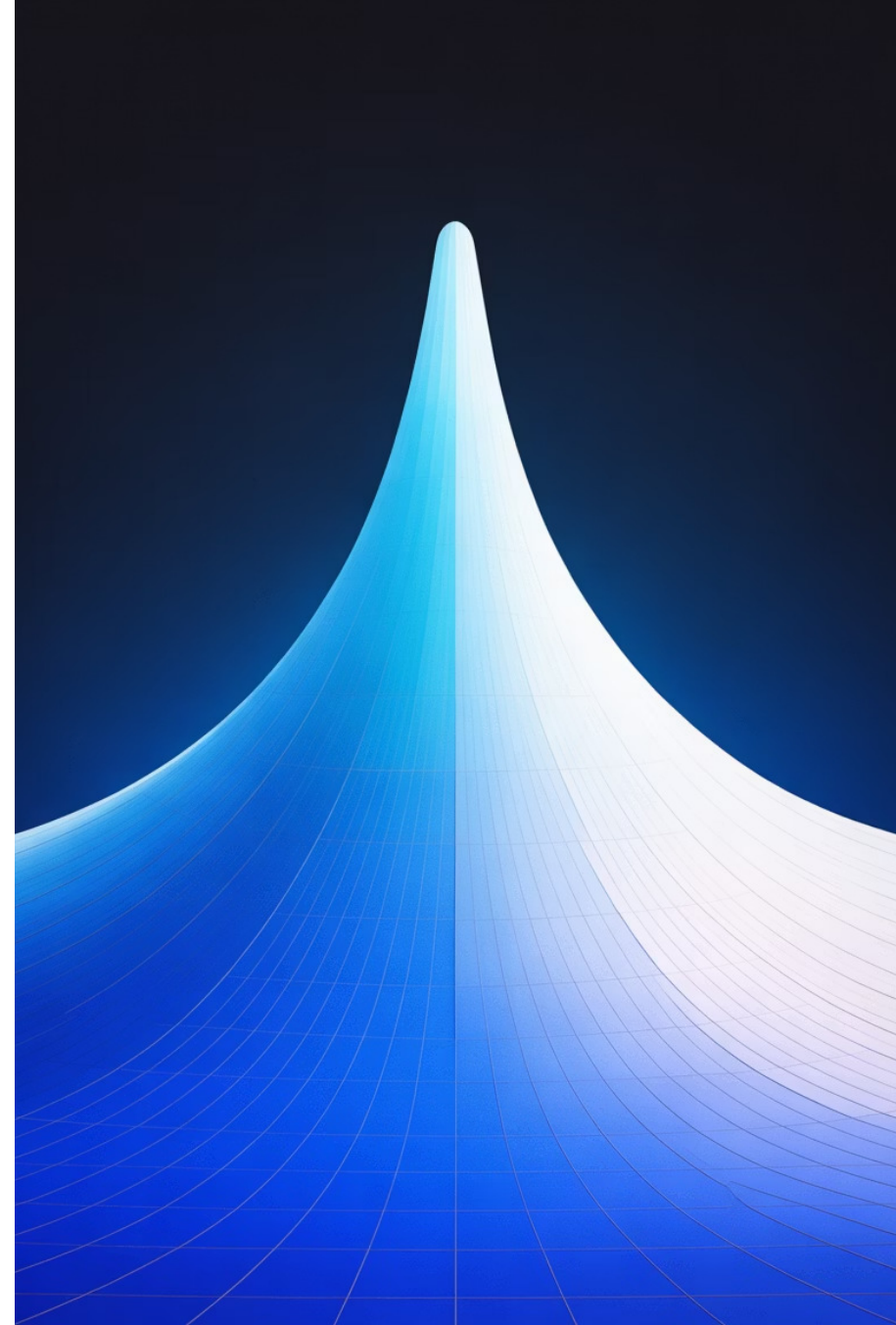


Normal Dağılım ve İstatistiksel Yaklaşımlar

İstatistik biliminin temel taşlarından biri olan normal dağılım, doğal ve sosyal bilimlerde sıklıkla karşılaşılan bir olasılık dağılımıdır. Bu sunumda, normal dağılımın temel felsefesinden başlayarak, tablo yorumlama tekniklerine ve kesikli dağılımların normal dağılıma yaklaşımına kadar geniş bir yelpazede konuları ele alacağız.



Normal Dağılım Nedir?

Normal dağılım, 18. yüzyılda ünlü matematikçi **Carl Friedrich Gauss** tarafından hata teorisi çalışmaları sırasında sistematik olarak tanımlanmıştır. Bu nedenle literatürde "Gauss Dağılımı" olarak da anılır.

Matematiksel olarak, normal dağılım iki parametre ile tamamen belirlenir: **ortalama (μ)** ve **varyans (σ^2)**. Bu sürekli olasılık dağılımı, doğada ve toplumda gözlemlenen birçok rastgele değişkenin davranışını modellemek için kullanılır.

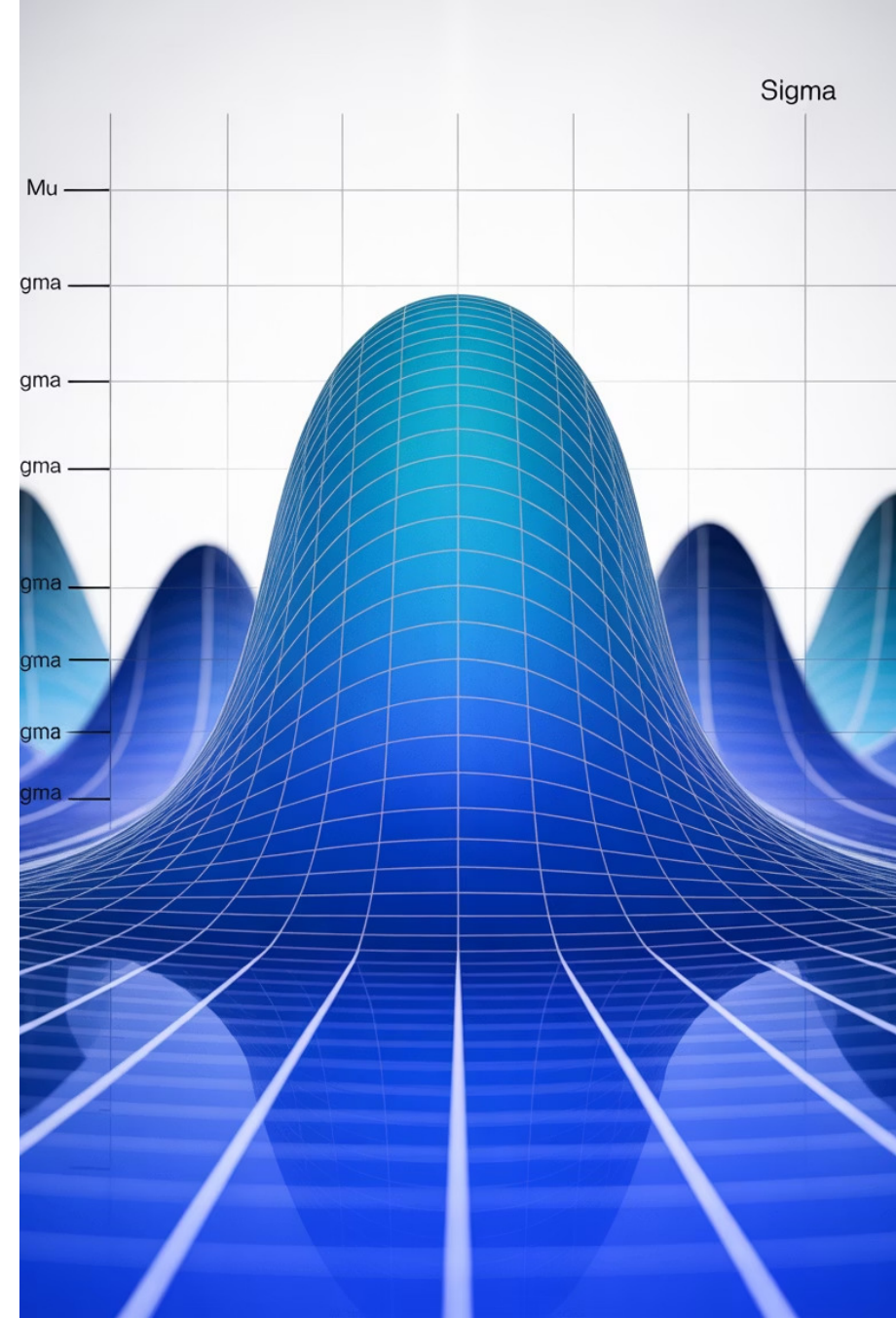
Temel Karakteristikler

- Çan eğrisi şeklinde görünüm
- Simetrik yapı
- Tek tepeli (unimodal)
- Sürekli olasılık dağılımı



Simetrik Normal Dağılım Eğrisi

Yukarıdaki grafik, normal dağılımın karakteristik çan eğrisi şeklini göstermektedir. Eğrinin merkezi ortalama değeri (μ) temsil ederken, genişliği standart sapma (σ) tarafından belirlenir. Simetrik yapısı sayesinde, ortalamadan eşit uzaklıktaki değerler eşit olasılıklara sahiptir.



Normal Dağılımın Temel Özellikleri

Merkezi Eğilim Ölçüleri

Normal dağılımın en ayırt edici özelliklerinden biri, üç temel merkezi eğilim ölçüsünün tam olarak aynı noktada bulunmasıdır:

Ortalama = Medyan = Mod

Bu özellik, dağılımın tam ortasında yer alır ve simetrik yapının matematiksel kanıtıdır.

Simetrik Yapı

Normal dağılım eğrisi, ortalama etrafında tamamen simetriktir. Eğrinin sağ ve sol tarafları birbirinin ayna görüntüsüdür.

Bu simetri özelliği, olasılık hesaplamalarını kolaylaştırır ve dağılımın tahmin edilebilirliğini artırır.

Asimptotik Özellik

Normal dağılım eğrisi, her iki yönde de sonsuza kadar uzanır ancak x eksenine asla değmez.

Matematiksel olarak, eğri x eksenine yaklaşır (asimptotik davranış) ama onu kesmez. Bu, teorik olarak tüm değerlerin pozitif olasılığa sahip olduğu anlamına gelir.

Normal Dağılımda Standart Sapmanın Rolü

Standart sapma (σ), normal dağılımın şeklini belirleyen kritik bir parametredir. Verinin ortalama etrafında ne kadar yayıldığını ölçer ve eğrinin genişliğini kontrol eder.



Küçük Standart Sapma

Standart sapma azaldıkça, dağılım sivrileşir ve veriler ortalama etrafında daha yoğun bir şekilde toplanır. Eğri daha dar ve dik görünür.



Büyük Standart Sapma

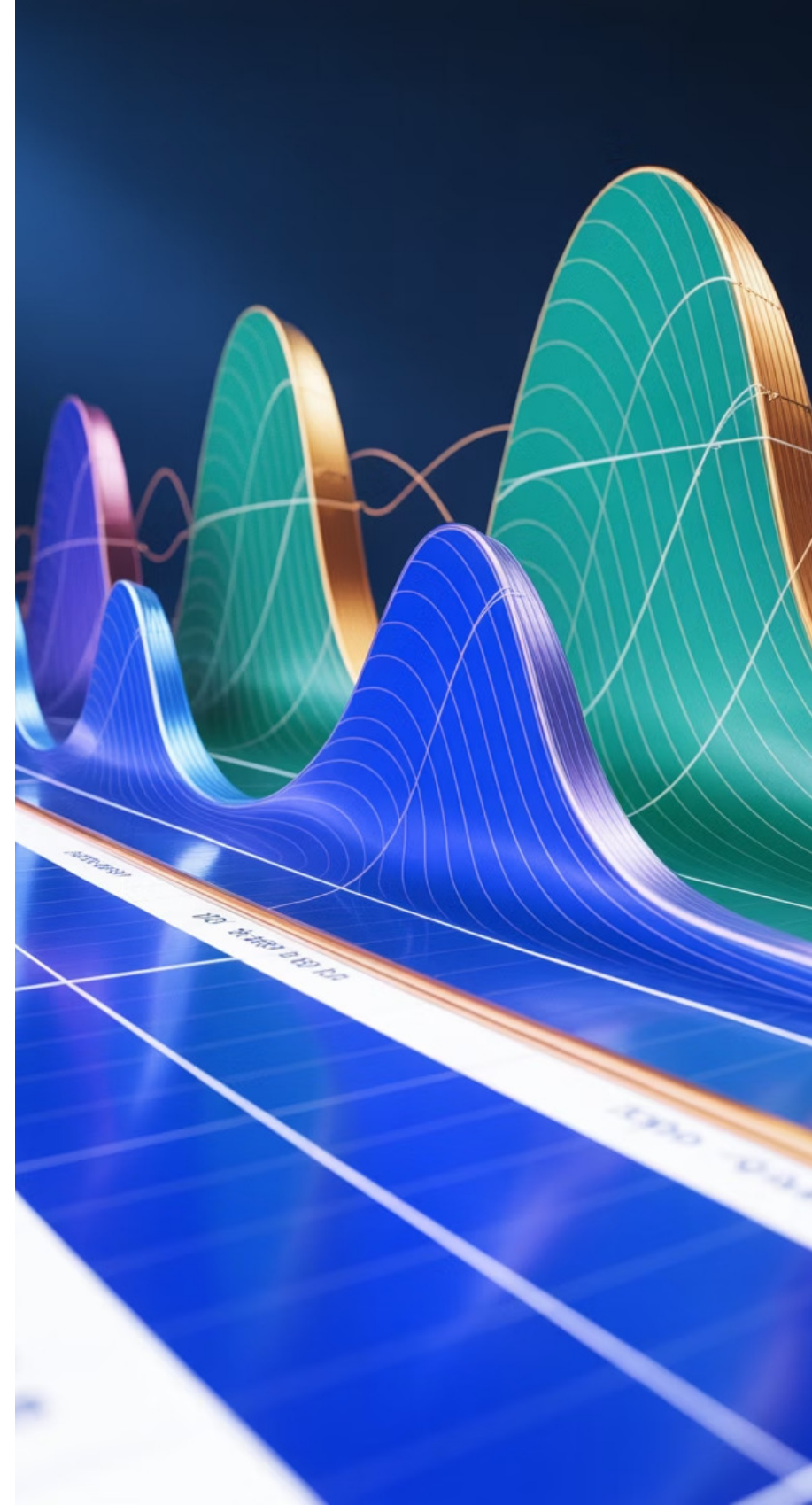
Standart sapma arttıkça, dağılım basıklaşır ve veriler daha geniş bir alana yayılır. Eğri daha geniş ve düz bir görünüm kazanır.

Empirik Kural (68-95-99.7 Kuralı)

Normal dağılımın en önemli özelliklerinden biri, verilerin standart sapma aralıklarına göre dağılımıdır:

- **%68** veri, ortalamadan $\pm 1\sigma$ uzaklıkta
- **%95** veri, ortalamadan $\pm 2\sigma$ uzaklıkta
- **%99.7** veri, ortalamadan $\pm 3\sigma$ uzaklıkta

Bu kural, istatistiksel analizlerde hızlı tahminler yapmak için sıklıkla kullanılır.





Bölüm 2

Normal Dağılımıda Tablo Yorumlama

Standart Normal Dağılım ve Z-Tablosu

Standart normal dağılım, ortalama $\mu = 0$ ve standart sapma $\sigma = 1$ olan özel bir normal dağılımdır. Her normal dağılım, standardizasyon işlemi ile standart normal dağılıma dönüştürülebilir.

Z-Skoru Nedir?

Z-skoru (standart skor), bir gözlemin ortalamadan kaç standart sapma uzaklıkta olduğunu gösteren standartlaştırılmış bir ölçüttür. Formülü:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Burada X gözlem değeri, μ ortalama ve σ standart sapmadır.

Z-Tablosu Kullanımı

Z-tablosu, standart normal dağılımda belirli bir z-skoruna karşılık gelen kümülatif olasılıkları içerir. Bu tablo ile:

- Olasılık hesaplamaları yapılabilir
- Yüzdelik dilimler bulunabilir
- Güven aralıkları belirlenebilir
- Hipotez testleri gerçekleştirilebilir

Örnek: Z=1.5 için Tablo Yorumlama

1

Z-Skoru Belirleme

Öncelikle z-skoru belirlenir: **Z = 1.5**

Bu değer, gözlemin ortalamasının 1.5 standart sapma sağında olduğunu gösterir.



Tabloda Arama

Z-tablosunda satır ve sütun kesişiminde 1.5 değeri bulunur.

Tablo değeri: **0.9332**



Olasılık Yorumlama

Z=1.5'in solundaki alan yaklaşık **%93.32**'dir.

Bu, gözlemin **%93.32'lik dilimde** yer aldığı anlamına gelir.

Başka bir deyişle, rastgele seçilen bir gözlemin Z=1.5'ten küçük olma olasılığı %93.32'dir. Alternatif olarak, gözlemin Z=1.5'ten büyük olma olasılığı ise %6.68'dir (100% - 93.32% = 6.68%).



Z-Tablosu ve Tablo Üzerinde Gösterim

Tablo Nasıl Okunur?

1. Z-skorunun tam ve ondalık birinci basamağı sol sütunda bulunur
2. Ondalık ikinci basamağı üst satırda aranır
3. Kesişim noktası kümülatif olasılığı verir
4. Bu değer, z-skorunun solundaki alanı temsil eder

Pratik Uygulama İpuçları

- Pozitif z-skorları tablonun sağ yarısını temsil eder
- Negatif z-skorları için simetri özelliği kullanılır
- Olasılık değerleri her zaman 0 ile 1 arasındadır
- Yüzdelik dilim için değeri 100 ile çarpın

Normal Dağılımın Kullanım Alanları

Biyoloji ve Tıp

İnsan boy ve kilo dağılımları, kan basıncı değerleri, laboratuvar test sonuçları ve biyometrik ölçümler genellikle normal dağılım gösterir.

Eğitim ve Psikoloji

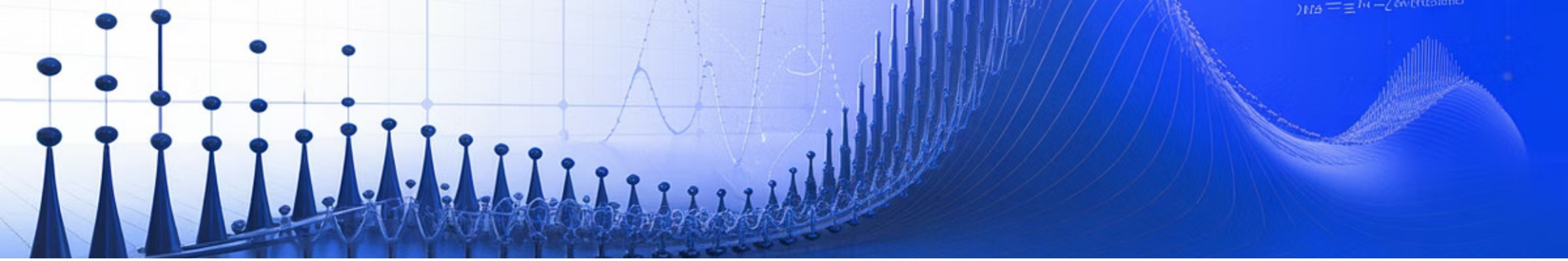
Sınav puanları, IQ skorları, öğrenci performans değerlendirmeleri ve psikolojik testler normal dağılım varsayımına dayanır.

Kalite Kontrol

Üretim süreçlerinde ürün ölçümleri, tolerans sınırları, hata oranları ve süreç varyasyonları normal dağılım ile modellenir.

Finans ve Ekonomi

Hisse senedi getirileri, fiyat değişimleri, ekonomik göstergeler ve risk analizi çalışmalarında normal dağılım kullanılır.



Bölüm 3

Kesikli Dağılımların Normal Dağılıma Yaklaşımı

Binom, Poisson ve Hipergeometrik Dağılımlar

Kesikli olasılık dağılımları, belirli matematiksel koşullar altında sürekli normal dağılıma yaklaşım gösterir. Bu yaklaşım, karmaşık hesaplamaları basitleştirir ve pratik uygulamalarda büyük kolaylık sağlar.



Binom Dağılımı

Sabit sayıda bağımsız Bernoulli denemesinin toplamını modelleyen binom dağılımı, **n büyük** ve **p orta değerlerde** (genellikle $np \geq 5$ ve $n(1-p) \geq 5$) normal dağılıma yakınsar.

Parametreler: $\mu = np$, $\sigma^2 = np(1-p)$



Poisson Dağılımı

Belirli bir zaman veya mekan aralığında nadir olayların sayısını modelleyen Poisson dağılımı, **λ büyük olduğunda** (genellikle $\lambda \geq 10$) normal dağılıma yaklaşır.

Parametreler: $\mu = \lambda$, $\sigma^2 = \lambda$



Hipergeometrik Dağılım

İadeli olmayan örneklemede başarı sayısını modelleyen hipergeometrik dağılım, **popülasyon büyüklüğü çok büyük olduğunda** normal dağılıma yaklaşır.

Örneklem büyüklüğü popülasyonun %5'inden az olduğunda yaklaşım iyi çalışır.

Moivre-Laplace Teoremi

Abraham de Moivre ve Pierre-Simon Laplace tarafından geliştirilen bu teorem, binom dağılımının normal dağılıma yaklaşımını matematiksel olarak açıklar.

Teoremin Önemi

Teorem, n sonsuza giderken standartlaştırılmış binom dağılımının standart normal dağılıma yakınsadığını garanti eder. Bu, Merkezi Limit Teoremi'nin özel bir durumudur.

Matematiksel İfade

$X \sim \text{Binom}(n, p)$ için $n \rightarrow \infty$ iken:

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1 - p)}} \rightarrow N(0, 1)$$

Bu standartlaştırma, binom olasılıklarının normal dağılım kullanılarak hesaplanmasını sağlar.

Uygulama Örneği: $n=100$, $p=0.5$

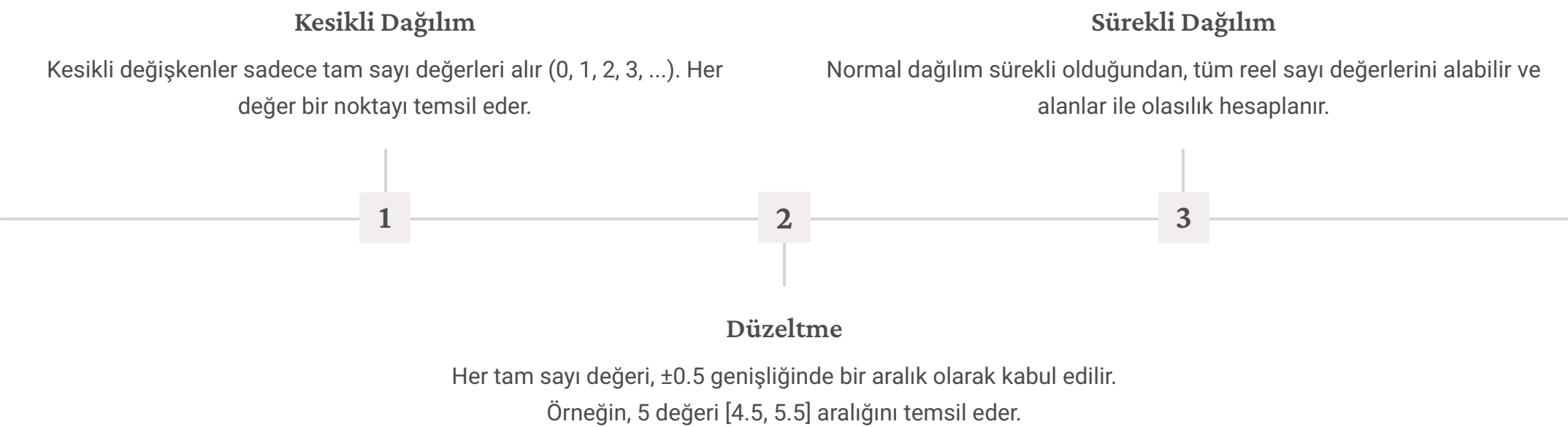
100 madeni para atışında tam 55 tura gelme olasılığını düşünelim. Binom formülü ile hesaplama oldukça karmaşıktır, ancak normal yaklaşım kullanarak:

$$\mu = 100 \times 0.5 = 50, \sigma = \sqrt{100 \times 0.5 \times 0.5} = 5$$

Normal dağılım ile yaklaşık olasılık hızlıca hesaplanabilir. Bu örnekte binom dağılımı ile normal dağılım neredeyse mükemmel uyum gösterir.

Süreklilik Düzeltmesi Nedir?

Kesikli bir dağılımı sürekli normal dağılım ile yaklaşık olarak modellerken, daha doğru sonuçlar elde etmek için **süreklilik düzeltmesi** (continuity correction) uygulanır. Bu düzeltme, kesikli ve sürekli dağılımlar arasındaki doğal farkı telafi eder.



Düzeltme Kuralları

- | | | |
|--|--|---|
| $P(X \leq k)$ için: $k + 0.5$ kullanın | $P(X \geq k)$ için: $k - 0.5$ kullanın | $P(X = k)$ için: $k - 0.5$ ile $k + 0.5$ arası kullanın |
| $P(X < k)$ için: $k - 0.5$ kullanın | $P(X > k)$ için: $k + 0.5$ kullanın | |



Binom Dağılımı ve Normal Yaklaşım

Yukarıdaki görsel, binom dağılımının histogram şeklindeki kesikli yapısını ve üzerine çizilmiş normal dağılım eğrisini göstermektedir. Süreklilik düzeltmesi, histogram çubuklarının orta noktalarını kullanmak yerine, her çubuğun sınırlarını dikkate alarak daha doğru olasılık hesaplamaları yapar.

Özellikle n orta büyüklükteyken (30-100 arası), süreklilik düzeltmesi yapmak ile yapmamak arasında belirgin farklar gözlemlenir. n çok büyük olduğunda ($n > 1000$) ise düzeltmenin etkisi minimum düzeye iner.

Bölüm 4

Tablo ve Grafiklerle Kesikli
Dağılımların Normal Yaklaşımı



Örnek: Poisson Dağılımı $\lambda=10$ için Normal Yaklaşım

Bir çağrı merkezine saatte ortalama 10 çağrı geldiğini varsayalım. Bu durum Poisson($\lambda=10$) dağılımı ile modellenebilir. $\lambda=10$ değeri yeterince büyük olduğundan, normal yaklaşım kullanabiliriz.

1

1. Parametreler

Poisson($\lambda=10$) için:

$$\mu = \lambda = 10$$

$$\sigma = \sqrt{\lambda} = \sqrt{10} \approx 3.16$$

2

2. Normal Yaklaşım

$$X \sim N(10, 3.16^2)$$

Bu dönüşüm ile z-tablosu kullanarak olasılık hesaplamaları yapılabilir.

3

3. Örtüşme Analizi

Poisson histogram değerleri ile normal dağılım eğrisi neredeyse tam örtüşür. Maksimum sapma %2'den azdır.

4

4. Süreklilik Düzeltmesi

$P(X \leq 12)$ hesaplarken 12.5 kullanmak, doğruluğu artırır ve gerçek Poisson değerine çok yakın sonuç verir.

Hesaplama Örneği

Saatte en fazla 12 çağrı gelme olasılığını bulalım ($P(X \leq 12)$):

- Süreklilik düzeltmesi ile: $Z = (12.5 - 10) / 3.16 \approx 0.79$
- Z-tablosundan: $P(Z \leq 0.79) \approx 0.7852$
- Yani, olasılık yaklaşık **%78.5**'tir

Hipergeometrik Dağılımda Normal Yaklaşım

Hipergeometrik Dağılım Özellikleri

Hipergeometrik dağılım, iadeli olmayan örneklemede başarı sayısını modelleyen kesikli bir dağılımdır. N büyüklüğündeki bir popülasyondan n elemanlı örneklem çekildiğinde, K başarılı elemandan kaç tanesinin seçileceğini hesaplar.

Parametreler: N (popülasyon), K (popülasyondaki başarı sayısı), n (örneklem büyüklüğü)

Normal Yaklaşım Koşulları

Hipergeometrik dağılım, aşağıdaki koşullar sağlandığında normal dağılıma yaklaşır:

- Popülasyon büyüklüğü N çok büyük ($N > 1000$)
- Örneklem popülasyonun küçük bir kısmı ($n/N < 0.05$)
- $np \geq 5$ ve $n(1-p) \geq 5$ ($p = K/N$)

1 Doğruluk Oranı

Koşullar sağlandığında normal yaklaşımın doğruluğu

2 Hesaplama Hızı

Normal yaklaşım kullanarak elde edilen zaman tasarrufu

3 Örneklem Oranı

Yaklaşımın geçerli olması için maksimum n/N oranı

Uygulama Alanları ve Sınırları

Hipergeometrik dağılımın normal yaklaşımı, kalite kontrol çalışmalarında, anket örneklemelerinde ve büyük popülasyonlardan örneklem alınan durumlarda yaygın olarak kullanılır. Ancak, örneklem boyutu popülasyona göre büyük olduğunda ($n/N > 0.10$), yaklaşım güvenilirliğini kaybeder ve kesin hipergeometrik hesaplamalar tercih edilmelidir.

Gelecek Hafta: Örneklem Dağılımları

Gelecek haftanın konusu olan örneklem dağılımları, istatistiksel çıkarımın temelini oluşturur ve normal dağılım bilgimizi bir üst seviyeye taşır.



Örneklem Ortalamalarının Dağılımı

Bir popülasyondan alınan farklı örneklemelerin ortalamalarının nasıl dağıldığını inceleyeceğiz. Örneklem ortalaması, popülasyon parametrelerini tahmin etmek için kullanılan temel araçtır.



Merkezi Limit Teoremi'nin Önemi

İstatistiğin en önemli teoremlerinden biri olan Merkezi Limit Teoremi'ni detaylı olarak ele alacağız. Bu teorem, örneklem büyüklüğü yeterince büyük olduğunda, örneklem ortalamalarının dağılımının normal dağılıma yaklaştığını garanti eder.



Örneklem Büyüklüğünün Etkisi

Örneklem büyüklüğünün örneklem dağılımının şekli, yayılımı ve doğruluğu üzerindeki etkilerini pratik örneklerle göstereceğiz. n değeri arttıkça standart hata nasıl azalır ve tahminler nasıl iyileşir, bunları analiz edeceğiz.

Özet ve Çıkarımlar

1 Normal Dağılımın Temel Özellikleri

Carl Friedrich Gauss tarafından tanımlanan normal dağılım, çan eğrisi şeklinde, simetrik ve tek tepeli bir yapıya sahiptir. Ortalama, medyan ve mod aynı noktadadır. Empirik kural (68-95-99.7) ile standart sapma aralıklarında verilerin dağılımı belirlenebilir.

3 Kesikli Dağılımların Normal Yaklaşımı

Binom, Poisson ve hipergeometrik gibi kesikli dağılımlar, belirli koşullar altında normal dağılıma yaklaşır. Moivre-Laplace teoremi bu yaklaşımın matematiksel temelini oluşturur. Süreklilik düzeltmesi (± 0.5) uygulayarak daha doğru sonuçlar elde edilebilir.

2 Tablo Yorumlama Becerisi

Z-tablosu kullanarak standart normal dağılımda olasılık hesaplamaları yapılabilir. Z-skoru, bir gözlemin ortalamadan kaç standart sapma uzakta olduğunu gösterir ve kümülatif olasılıkları bulmamızı sağlar. Bu beceri, istatistiksel analizlerde güvenilir sonuçlar elde etmek için kritik öneme sahiptir.

4 Gelecek Adımlar

Bu hafta öğrendiğimiz normal dağılım ve kesikli dağılımların yaklaşımı bilgisi, gelecek hafta ele alacağımız örnekleme dağılımları ve Merkezi Limit Teoremi için sağlam bir temel oluşturur. Bu konular, istatistiksel çıkarımların derinlemesine anlaşılmasını sağlayacaktır.