

# Çarpıklık ve Basıklık: Momentler, Pearson Katsayıları ve Olasılık Teorisine Giriş

Doç. Dr. Ömer Faruk Rençber

# Bölüm 1: Çarpıklık ve Basıklık Nedir?



## Çarpıklık (Skewness)

Dağılımın simetrik olmama derecesini ölçen temel istatistiksel gösterge. Verinin hangi yöne doğru yığıldığını gösterir.



## Basıklık (Kurtosis)

Dağılımın sivriliğini veya yayvanlığını ifade eder. Uç değerlerin varlığı hakkında önemli bilgiler sunar.



## Şekil Özellikleri

Veri setlerinin yapısal karakteristiklerini anlamada kullanılan temel ölçüler. Ortalama ve varyansın ötesinde anlam katarlar.

# Momentler: Tanım ve Önemi

Momentler, dağılımın şekil özelliklerini sayısal olarak ifade eden güçlü matematiksel araçlardır. Her moment, dağılım hakkında farklı bir bilgi sunar: (Sıfır etrafında moment)

01

## Birinci Moment: Ortalama

Dağılımın merkezi konumunu belirler. Verilerin genel eğilimini gösterir.

03

## Üçüncü Moment: Çarpıklık

Dağılımın asimetrisini ölçer. Sağa veya sola kayma derecesini belirtir.

02

## İkinci Moment: Varyans

Verilerin ortalamadan ne kadar uzaklaştığını ölçer. Dağılımın yayılımını gösterir.

04

## Dördüncü Moment: Basıklık

Dağılımın sivriliğini ve kuyruk ağırlığını ölçer. Uç değerlerin etkisini gösterir.

# Momentlerin Matematiksel Formülleri

## Genel Moment Tanımı

$k$ . mertebeye ait merkezi moment:

$$\mu_k = E[(X - \mu)^k]$$

Burada  $E$  beklenen değeri,  $\mu$  ortalamayı,  $k$  ise moment mertebesini gösterir.

## Çarpıklık ve Basıklık

**3. Moment (Çarpıklık):**

$$\gamma_1 = \frac{E[(X - \mu)^3]}{\sigma^3}$$

**4. Moment (Basıklık):**

$$\gamma_2 = \frac{E[(X - \mu)^4]}{\sigma^4}$$

# Pearson Çarpıklık Katsayısı Nedir?

Karl Pearson tarafından geliştirilen bu katsayı, dağılımın asimetrisini pratik bir şekilde ölçer. Ortalama, medyan ve standart sapma gibi kolay hesaplanabilir istatistikleri kullanır.

## Matematiksel Formül

$$P\check{C}K = \frac{3(\text{Ortalama} - \text{Medyan})}{\text{Standart Sapma}}$$

- Değer aralığı: -1 ile +1 arasında
- 0 değeri simetrik dağılımı gösterir
- Hesaplaması basit ve sezgisel



# Pearson Çarpıklık Katsayısının Yorumu



$$P\check{C}K > 0$$

**Sağ tarafa çarpık**

Sağa kuyruklu dağılım. Ortalama medyandan büyük. Aşırı yüksek değerler mevcut.



$$P\check{C}K = 0$$

**Simetrik dağılım**

Dengeli dağılım. Ortalama ve medyan eşit. Normal dağılım benzeri yapı.



$$P\check{C}K < 0$$

**Sol tarafa çarpık**

Sola kuyruklu dağılım. Ortalama medyandan küçük. Aşırı düşük değerler mevcut.

# Basıklık Katsayısı Nedir?

## Tanım ve Amaç

Basıklık, dağılımın sivriliğini ve kuyruk ağırlığını ölçen dördüncü momenttir. Uç değerlerin varlığını tespit etmede kritik rol oynar.

## Normal Dağılım Referansı

Normal dağılımın basıklık değeri **3**'tür. Bu değer, karşılaştırmalarda referans noktası olarak kullanılır.

## Yorum Kriterleri

Basıklık  $> 3$ : **Leptokurtik** (sivri, ağır kuyruklu)

Basıklık  $< 3$ : **Platikurtik** (yayvan, hafif kuyruklu)

# Basıklık Katsayısının Hesaplanması

## Matematiksel Formül

$$\text{Basıklık} = \frac{E[(X - \mu)^4]}{\sigma^4}$$

### Hesaplama Adımları

- Her veri noktasından ortalamayı çıkar
- Farkların dördüncü kuvvetini al
- Bu değerlerin ortalamasını hesapla
- Standart sapmanın dördüncü kuvvetine böl

### Önemli Notlar

Fazla uç değerlerin etkisi **çok büyüktür** çünkü farklar dördüncü kuvvete yükseltilir.

Bu özellik, basıklığı aykırı değerlerin tespitinde güçlü bir araç yapar.

❏ **Fazla Basıklık (Excess Kurtosis):** Çoğu yazılım basıklık - 3 değerini verir, böylece normal dağılım için 0 referans alınır.

# Basıklık Değerlerinin Görsel Karşılaştırması

## Leptokurtik (Basıklık $> 3$ )

Sivri tepe, ağır kuyruklar. Uç değerlerin olasılığı yüksek. Örnek: Mali krizlerde getiri dağılımları.

## Mezokurtik (Basıklık $= 3$ )

Normal dağılım. Orta derecede kuyruk ağırlığı. Dengeli yapı. Birçok doğal olayın modeli.

## Platikurtik (Basıklık $< 3$ )

Yayvan tepe, hafif kuyruklar. Uç değerler nadir. Örnek: Sınırlı aralıklı veriler.

# Sağ ve Sola Çarpık Eğriler: Gerçek Hayat Örnekleri



## Sağa Çarpık Örnekler

- **Gelir Dağılımı:** Çoğu kişi düşük-orta gelir, az sayıda kişi çok yüksek gelir
- **Ev Fiyatları:** Lüks malikâneler kuyruğu uzatır
- **Şirket Büyüklükleri:** Birkaç dev şirket, çok sayıda küçük işletme

## Sola Çarpık Örnekler

- **Sınav Notları:** Üst sınır (100) baskın, düşük notlar kuyruk oluşturur
- **Yaşam Süreleri:** Çoğunluk uzun yaşar, erken ölümler kuyrukta
- **Ürün Kalitesi:** Çoğu ürün yüksek kaliteli, az kusurlu

# Momentler ve Çarpıklık-Basıklık İlişkisi



Üçüncü moment çarpıklığı, dağılımın simetrik olmama derecesini gösterir. Pozitif değer sağa, negatif değer sola çarpıklığı işaret eder.

Dördüncü moment basıklığı, kuyrukların ağırlığını ve uç değerlerin etkisini ortaya koyar. Yüksek basıklık, aykırı değerlerin varlığına işaret eder.

❏ **Önemli:** Momentler sayesinde veri setinin şekli tam olarak tanımlanabilir ve farklı dağılımlar matematiksel olarak karşılaştırılabilir.

# Pearson Çarpıklık Katsayısı: Hesaplama Örneği

## Örnek Veri Seti

Veri: [10, 12, 15, 18, 50]

### Adım 1: Ortalama

$$\mu = \frac{10 + 12 + 15 + 18 + 50}{5} = 21$$

### Adım 2: Medyan

Sıralı veride orta değer: 15

### Adım 3: Standart Sapma

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \mu)^2}{n}} \approx 15.56$$

### Adım 4: PÇK Hesaplama

$$P\check{C}K = \frac{3(21 - 15)}{15.56} \approx 1.16$$

**Yorum:** PÇK = 1.16 > 0 olduğundan, dağılım **sağa çarpıktır**. Bu durum, 50 gibi aşırı yüksek bir değer varlığından kaynaklanmaktadır.

# Basıklık Katsayısı: Hesaplama Örneği

Aynı veri seti için basıklık hesaplayalım: [10, 12, 15, 18, 50]

## Hesaplama Süreci

### 1. Her değer için $(x - \mu)^4$ :

- $(10-21)^4 = 14,641$
- $(12-21)^4 = 6,561$
- $(15-21)^4 = 1,296$
- $(18-21)^4 = 81$
- $(50-21)^4 = 707,281$

2. Ortalama:  $(14,641 + 6,561 + 1,296 + 81 + 707,281) / 5 = 145,972$

3.  $\sigma^4$ :  $(15.56)^4 \approx 58,550$

4. Basıklık:  $145,972 / 58,550 \approx \mathbf{2.49}$



## Yorum

Basıklık =  $2.49 < 3$

Dağılım **platikurtik** (yayvan). Ancak 50 gibi uç değer dördüncü kuvvette büyük etki yaratmıştır.

# Momentlerin Alınma Noktaları



## Merkezi Momentler

Ortalama etrafında alınır

$$\mu_k = E[(X - \mu)^k]$$

- Dağılımın şeklini karakterize eder
- Çarpıklık ve basıklık hesaplamalarında kullanılır
- Daha yorumlanabilir sonuçlar verir



## Ham Momentler

Sıfır noktası etrafında alınır

$$\mu'_k = E[X^k]$$

- Matematiksel türetmelerde kullanışlı
- Moment üreten fonksiyonlarda temel
- Merkezi momentlere dönüştürülebilir

❏ **Dönüşüm:** Ham momentlerden merkezi momentlere binom açılımı ile geçiş yapılabilir. Örneğin:  $\mu_2 = \mu'_2 - (\mu'_1)^2$

# Moment Hesaplama Süreci



# Gelecek Hafta: Olasılık Teorisine Giriş



## Kapsanacak Konular

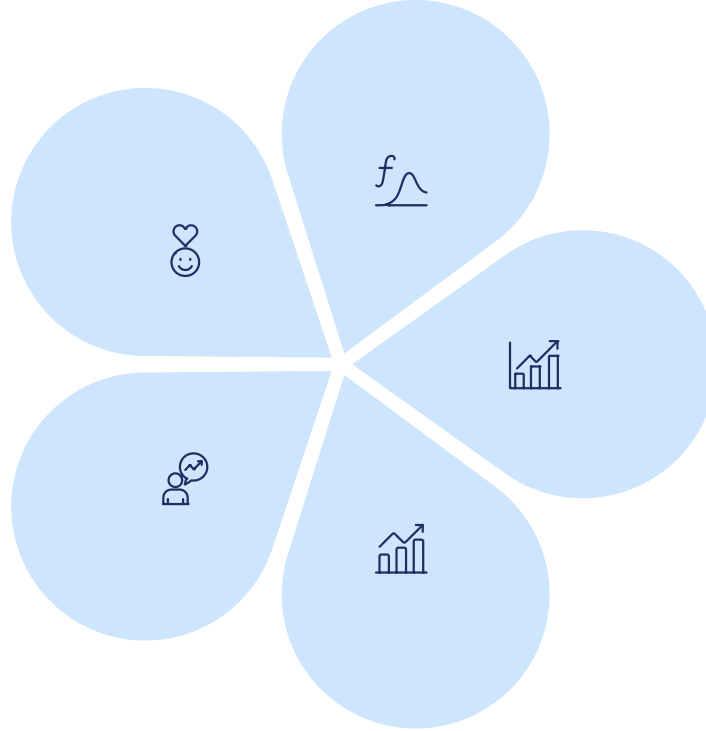
- **Temel Kavramlar:** Deney, örnek uzay, olay tanımları
- **Olasılık Aksiyomları:** Kolmogorov aksiyomları ve özellikleri
- **Olasılık Dağılımları:** Kesikli ve sürekli dağılımlar
- **Momentlerin Rolü:** Olasılık dağılımlarını karakterize etme

Çarpıklık ve basıklık, olasılık dağılımlarının şekillerini tanımlamada kritik rol oynar. Gelecek hafta bu bağlantıyı derinlemesine inceleyeceğiz.

# Olasılık Teorisi ve Momentler Arasındaki Bağlantı

**Karakteristik Özellikler**  
Momentler olasılık dağılımlarının tam karakterizasyonunu sağlar

**Hipotez Testleri**  
Dağılım karşılaştırmalarında moment eşleştirme yöntemi



## MGF

Moment üreten fonksiyonlar (MGF) tüm momentleri içerir

## Dağılım Belirleme

Sonsuz sayıda moment bir dağılımı benzersiz şekilde tanımlar

## Modelleme

İstatistiksel modellemede parametre tahmini için kullanılır

Moment üreten fonksiyonlar (MGF), bir rastgele değişkenin tüm momentlerini tek bir fonksiyonda toplar:  $M_X(t) = E[e^{tX}]$

# Özet ve Anahtar Çıkarımlar

## 1 Şekil Özellikleri

Çarpıklık ve basıklık, dağılımın şekil özelliklerini sayısal olarak ifade eden güçlü araçlardır. Ortalama ve varyansın ötesinde derinlemesine anlayış sağlarlar.

## 2 Pearson Katsayıları

Pearson çarpıklık katsayısı, pratik ve yorumlanabilir bir ölçüdür. Ortalama, medyan ve standart sapma kullanarak hızlı hesaplama imkanı sunar.

## 3 Momentlerin Gücü

Momentler, veri analizi ve olasılık teorisinde temel araçlardır. Her moment seviyesi dağılım hakkında benzersiz bilgi sağlar.

## 4 Devam Eden Yolculuk

Olasılık teorisi ile devam edecek derinlemesine keşif. Momentlerin teorik temellerini ve uygulamalarını genişleteceğiz.

